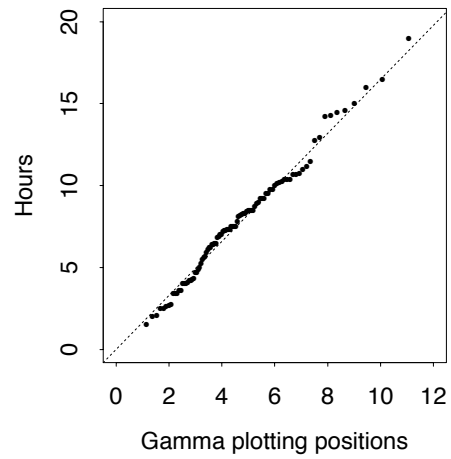
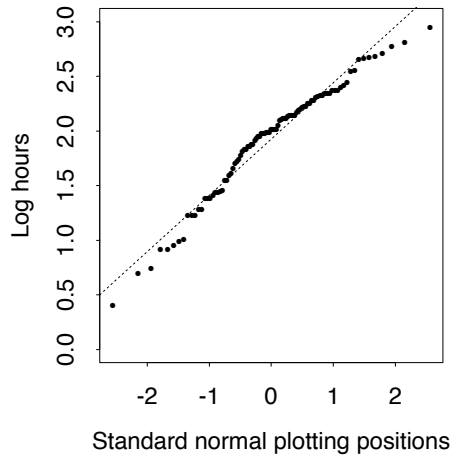
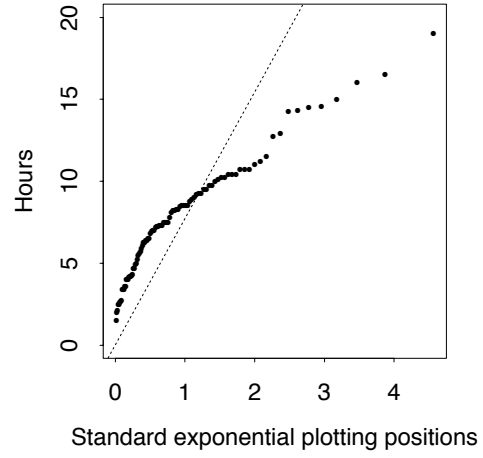
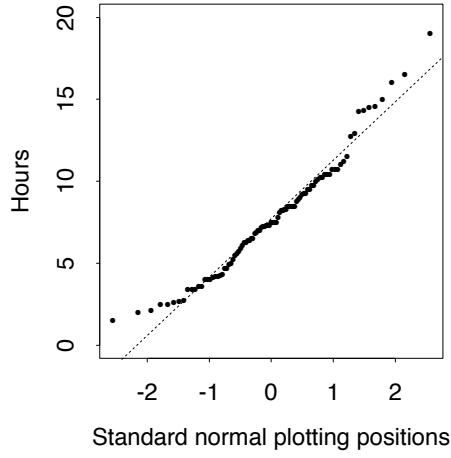


Série 12



Solution 49. a) Soit $R_u = \sum_{j=1}^n I(U_j \leq u)$, alors $R_u \sim B(n, u)$, car les $U_j \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$, et puisque $R_u \geq r \Leftrightarrow U_{(r)} \leq u$, on a

$$\Pr(U_{(r)} \leq u) = \Pr(R_u \geq r) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j}.$$

La fonction de distribution de $U_{(r)}$ peut être réécrite comme

$$\sum_{j=r}^n \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j} = \int_0^u \frac{t^{r-1} (1-t)^{n-r}}{\text{Be}(r, n-r+1)} dt.$$

où $\text{Be}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ est la fonction Beta, et alors la fonction de densité de $U_{(r)}$ est comme annoncée par le théorème fondamental de l'analyse. Sinon, on

note que la dérivée

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j} &= \sum_{j=r}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} \{j u^{j-1} (1-u)^{n-j} - (n-j) u^j (1-u)^{n-j-1}\} \\
&= n! \left[\left\{ \frac{u^{r-1} (1-u)^{n-r}}{(r-1)!(n-r)!} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=r+1}^n \frac{u^{j-1} (1-u)^{n-j+1}}{(j-1)!(n-j)!} - \frac{u^{j-1} (1-u)^{n-j+1}}{(j-1)!(n-j)!} \right\} \right] \\
&= \frac{n! u^{r-1} (1-u)^{n-r}}{(r-1)!(n-r)!},
\end{aligned}$$

en notant que la somme à droite sur la première ligne peut être écrit comme

$$(a_r - b_r) + (a_{r+1} - b_{r+1}) + \cdots + (a_n - b_n),$$

avec $b_j = a_{j+1}$ pour $j = r, \dots, n-1$ et $a_n = 0$, et donc le seul terme qui reste est a_r .

Autrement :

La densité est obtenue en notant que si $U_{(r)} = u$, on doit diviser les $U_1, \dots, U_n$ en trois catégories, une avec les $r-1$ observations qui sont plus petites que u , une avec une observation $U_j \in [u, u+du]$, et une avec les $n-r$ observations plus grandes que u . Le nombre de façons de faire ceci est $n!/\{(r-1)!1!(n-r)!\}$, et les probabilités qu'une seule observation tombe dans les catégories sont respectivement $\Pr(U_j \leq u) = u$, $\Pr\{U_j \in [u, u+du]\} = du$ et $\Pr(U_j > u) = 1-u$, pour $u \in (0, 1)$. Donc on a

$$\Pr\{U_{(r)} \in [u, u+du]\} = f_{U_{(r)}}(u)du = \frac{n!}{(r-1)!1!(n-r)!} \times u^{r-1} \times du \times (1-u)^{n-r}, \quad u \in (0, 1),$$

donnant les resultat.

b) Rappelons que $k\Gamma(k) = \Gamma(k+1)$; les moments sont des intégrales Beta, donc

$$E(U_{(r)}^t) = \int_0^1 \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} u^{r+t-1} (1-u)^{n-r} du = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} \frac{\Gamma(r+t)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(n+t+1)},$$

et avec $t = 1, 2$ on a $r/(n+1)$, $r(r+1)/\{(n+1)(n+2)\}$; ainsi

$$\text{var}(U_{(r)}) = r(n-r+1)/\{(n+1)^2(n+2)\}.$$

c) La transformation $x \rightarrow F(x)$ est strictement croissante et $F(\mathbb{R}) = [0, 1]$, donc F^{-1} est aussi absolument continue. Ainsi $F^{-1}(U_i) \sim F$ car

$$\Pr(F^{-1}(U_i) \leq x) = \Pr(U_i \leq F(x)) = F(x), \quad x \in (0, 1),$$

et donc X_i et $F^{-1}(U_i)$ ont la même loi.

d) En remplaçant r par $\lceil n\alpha \rceil$, nous avons $E(U_{\lceil n\alpha \rceil}) = \lceil n\alpha \rceil / (n+1) \rightarrow \alpha$ pour $n \rightarrow \infty$ et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{var}(U_{(r)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\lceil n\alpha \rceil (n - \lceil n\alpha \rceil + 1)}{(n+1)^2(n+2)} = \alpha(1-\alpha).$$

Par l'inégalité de Tchebychev,

$$\Pr\left(\left|U_{\lceil n\alpha \rceil} - \frac{\lceil n\alpha \rceil}{n+1}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\lceil n\alpha \rceil (n+1 - \lceil n\alpha \rceil)}{\epsilon^2 (n+1)^2 (n+2)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ce qui donne $U_{[n\alpha]} \xrightarrow{P} \alpha$. On peut écrire

$$U_{(r)} = p_n + (n+2)^{-1/2} \{p_n(1-p_n)\}^{1/2} \varepsilon$$

avec $p_n = \frac{r}{n+1}$ et $\varepsilon \sim (0, 1)$.

Les lois de $X_1, \dots, X_n$ et $F^{-1}(U_1), \dots, F^{-1}(U_n)$ sont les mêmes, ainsi $X_{(r)}$ a la même loi que $F^{-1}(U_{(r)})$. Mettons $F^{-1} \equiv g$, alors un développement de Taylor donne

$$\begin{aligned} E[X_{(r)}] &= E[g(U_{(r)})] \\ &= E\left\{g(p_n) + g'(p_n)(n+2)^{-1/2}\{p_n(1-p_n)\}^{1/2}\varepsilon + \frac{1}{2}g''(p_n)(n+2)^{-1}p_n(1-p_n)\varepsilon^2 + \dots\right\} \\ &= g(p_n) + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

car $E(\varepsilon) = 0$ et $E(\varepsilon^2) = 1$, et les autres termes (les $\dots$) sont d'ordre plus petit. Donc $E[X_{(r)}] \approx F^{-1}\{r/(n+1)\}$.

Le Q-Q plot trace les quantiles empiriques (données) $X_{(r)}$ sur l'axe y contre les quantiles théoriques sur l'axe x . Les positions de traçage pour ces derniers sont généralement fixées à $F^{-1}\{r/(n+1)\}$ et les intervalles de confiance basés sur la distribution des statistiques d'ordre peuvent être ajoutés pour aider à l'interprétation de ce dernier.

- e) La loi exponentielle a $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ pour $x > 0$, donc

$$F^{-1}\{r/(n+1)\} = \lambda^{-1} \times -\ln\{1 - r/(n+1)\} = \lambda^{-1}x_r, \quad r = 1, \dots, n.$$

Donc j'ordonne mes données $y_1, \dots, y_n$, me donnant $0 < y_{(1)} < \dots < y_{(n)}$, et le Q-Q plot a les n paires $(x_r, y_{(r)})$. Si les $y_j \sim \exp(\lambda)$, alors le graphique tend à être linéaire avec pente $1/\lambda$.

- f) Tous les panneaux sauf celui en bas à droite sont plus ou moins convexe ou concave. De plus la loi normale pourrait donner les temps négatifs, et la loi exponentielle est visiblement mal ajustée pour ces données. La loi gamma fournit le meilleur plot, suivi par la loi log-normale.

Solution 50.

- a) Si nous désignons X comme étant le nombre total de faces, alors X suit une distribution binomiale $X \sim B(n, p)$. Si la pièce est équilibrée alors $p = \frac{1}{2}$ et l'hypothèse nulle est $H_0 : p = \frac{1}{2}$.
- b) On veut une statistique de test qui aurait tendance à être grande quand H_0 est fausse, c'est-à-dire que $p < 1/2$ ou $p > 1/2$. Donc $S = \sum_{j=1}^n Y_j$ n'est pas un bon choix car il détectera que le cas $p > 1/2$. Un meilleur choix est $T = |S - n/2|$, qui sera grande quand $E(S) = np$ diverge de sa valeur $n/2$ sous H_0 . Sous H_0 , $S \sim B(n, 1/2)$, et ainsi $S \sim \mathcal{N}(n/2, n/4)$ sous H_0 . Donc

$$\Pr_0(T \geq t_{\text{obs}}) = \Pr_0(|S - n/2| \geq t_{\text{obs}}) = \Pr_0(S - n/2 \leq -t_{\text{obs}} \text{ ou } S - n/2 \geq t_{\text{obs}}),$$

et avec l'approximation normale $S \sim \mathcal{N}(n/2, n/4)$ ceci devient

$$2\Pr_0(S - n/2 \leq -t_{\text{obs}}) \doteq 2\Phi\left(-\frac{t_{\text{obs}}}{\sqrt{n/4}}\right) = 2\Phi\left(-2n^{-1/2}t_{\text{obs}}\right).$$

- c) Dans ce cas $t_{\text{obs}} = |115 - 200/2| = 15$, et donc $p_{\text{obs}} \doteq 2\Phi(-30/\sqrt{200}) = 0.034$. C'est donc un événement peu habituel, mais pas autant que l'on pourrait être assez certain que la pièce n'est pas équilibrée.

Série 13

Solution 51. Le tableau suivant contient les résultats de Mendel :

	Jaune, rond	Jaune, ridé	Vert, rond	Vert, ridé
Effectifs	315	101	108	32
Probabilité empirique	$\frac{315}{556}$	$\frac{101}{556}$	$\frac{108}{556}$	$\frac{32}{556}$
Probabilité théorique	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

On désire alors tester l'hypothèse H_0 : les fréquences d'apparition des différents caractères sont bien données par les prédictions de Mendel, contre l'hypothèse alternative. C'est un exemple typique de l'usage du test d'adéquation du χ^2 . On a

$$Z_{556} = \frac{\left(315 - 556 \cdot \frac{9}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{9}{16}} + \frac{\left(101 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(108 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(32 - 556 \cdot \frac{1}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{1}{16}} \approx 0,47.$$

Pour un seuil de 5%, on obtient que $\Pr(\chi_3^2 > C) = 0.05$ pour $C = 7.82$. Puisque $0.47 \ll 7.82$, les observations sont compatibles avec l'hypothèse nulle.

Solution 52. L'hypothèse H_0 est $\mu = 10$ et l'hypothèse H_1 est $\mu > 10$. Comme les $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1.96)$, on a que $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 1.96/n)$ (avec $n = 25$). Donc, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \Pr_0(\text{rejet de } H_0) = \Pr_0(\bar{X} > c_i) \\ &= 1 - P_{\mu=10}(\bar{X} \leq c_i) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-10}{\sqrt{1.96/25}} \leq \frac{c_i-10}{\sqrt{1.96/25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c_i-10}{\sqrt{1.96/25}}\right), \end{aligned}$$

où $c_1 = 10.65$, $c_2 = 10.45$ et Φ la fonction de répartition $\mathcal{N}(0, 1)$. On obtient alors $\alpha_1 = 1 - \Phi(2.32) = 0.0102$ et $\alpha_2 = 1 - \Phi(1.61) = 0.0537$. De manière similaire, on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \beta_i &= P_1(\text{ne pas rejeter } H_0) = P_\mu(\bar{X} \leq c_i) \\ &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1.96/25}} \leq \frac{c_i-\mu}{\sqrt{1.96/25}}\right) = \Phi\left(\frac{c_i-\mu}{\sqrt{1.96/25}}\right). \end{aligned}$$

Solution 53. a) On cherche une valeur critique $t_{1-\alpha}$ telle que $\Pr_0(T_j \geq t_{1-\alpha}) = \alpha$. Sous H_0 , on a $1 - \Phi(t_{1-\alpha}) = \alpha$. On obtient alors $t_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) = 1.644$ pour $\alpha = 0.05$.

b) La probabilité d'un faux positif est $\Pr_0(T_j > t_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(t_{1-\alpha}) = \alpha$. La probabilité d'un vrai positif est $\Pr_1(T_j \geq t_{1-\alpha}) = \Pr_1(T_j - 3 \geq t_{1-\alpha} - 3) = 1 - \Phi(t_{1-\alpha} - 3) = 1 - \Phi(1.644 - 3) = 0.91$.

c) Soit $I_j = I(\text{hypothèse } H_j \text{ est vraie})$. Alors

$$\begin{aligned} \Pr(I_j = 1 \mid T_j > t_{1-\alpha}) &= \frac{\Pr(T_j > t_{1-\alpha} \mid I_j = 1)\Pr(I_j = 1)}{\Pr(T_j > t_{1-\alpha} \mid I_j = 1)\Pr(I_j = 1) + \Pr(T_j > t_{1-\alpha} \mid I_j = 0)\Pr(I_j = 0)} \\ &= \frac{(1 - \Phi(t_{1-\alpha}))\Pr(I_j = 1)}{(1 - \Phi(t_{1-\alpha}))\Pr(I_j = 1) + (1 - \Phi(t_{1-\alpha} - 3))\Pr(I_j = 0)} \\ &\approx \frac{0.05 \times 950/1000}{0.05 \times 950/1000 + 0.91 \times 50/1000} \\ &= 0.51, \end{aligned}$$

car $\Pr(I_j = 1) = 950/1000$ et $\Pr(I_j = 0) = 50/1000$. On peut conclure qu'à peu près la moitié des hypothèses rejetées sont des faux positifs.

- d) Pour $\alpha = 0.05$ l'espérance du nombre de faux positifs est $950 \times 0.05 = 47.5$ et l'espérance du nombre de vrais positifs est $50 \times 0.91 \approx 45$. Ces espérances s'alignent avec b), car $47.5/(47.5 + 45) \approx 0.51$.

Solution 54. a) On a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\theta} x \times \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta}{2}.$$

Soit $m_1 = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$ le premier moment empirique. La méthode des moments donne $m_1 = \tilde{\theta}/2$, donc $\tilde{\theta} = 2m_1$.

b) On a

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad E(X^2) = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}.$$

Soient $m_r = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j^r$ ($r = 1, 2$) les deux premiers moments empiriques. Par la méthode des moments, on obtient :

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}} = m_1, \quad \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\lambda}^2} = m_2,$$

et ainsi (noter que $m_2 - m_1^2 > 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz),

$$\tilde{\alpha} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}.$$

- c) En utilisant la loi des grands nombres et le lemme de Slutsky, nous pouvons dire que ces estimateurs sont consistants ; on n'a qu'à vérifier les conditions du théorème 115 du cours.

Solution 55. On observe $x_1, \dots, x_n$, une réalisation de $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$. La fonction de vraisemblance est

$$L(\lambda) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j; \lambda) = \lambda^n \exp \left(-\lambda \sum_{j=1}^n x_j \right), \quad \lambda > 0,$$

et ainsi la log-vraisemblance est $\ell(\lambda) = \log L(\lambda) = n(\log \lambda - \lambda \bar{x})$, pour $\lambda > 0$, avec $\bar{x} = n^{-1} \sum x_j$.

— On a

$$\ell'(\lambda) = n(1/\lambda - \bar{x}), \quad \ell''(\lambda) = -n/\lambda^2, \quad \lambda > 0.$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance est la solution à l'équation $\ell'(\lambda) = 0$, soit $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$. Puisque $\ell''(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda > 0$, on voit que $\hat{\lambda}$ donne l'unique maximum de ℓ .

- L'information observée est $J(\lambda) = -\ell''(\lambda) = n/\lambda^2$. Celle-ci n'est pas aléatoire, et ainsi égale l'information de Fisher : $I(\lambda) = J(\lambda) = n/\lambda^2$.
- La loi des grands nombres donne $\bar{X} \xrightarrow{P} E(X) = 1/\lambda > 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et puisque la fonction $h(x) = 1/x$ est continue pour $x > 0$,

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{X} \xrightarrow{P} 1/E(X) = \lambda$$

par le théorème 115 du cours. L'estimateur $\hat{\lambda}$ est donc consistant.

Série 14

Solution 56. a) Ici on parle d'une augmentation du poids, et non pas d'un changement. Donc le test devrait être unilatéral, on s'intéresse seulement à détecter si $\bar{X}$ soit trop grand par rapport à sa loi nulle.

Si H_0 est vraie, alors la statistique

$$T = \frac{\bar{X} - 5}{\sigma/\sqrt{12}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

D'après les données de l'exercice, on a :

$$\bar{x} = 10.017, \quad t_{\text{obs}} = \frac{10.017 - 5}{8/\sqrt{12}} = 2.17.$$

Soit $z_{1-\alpha}$ le $(1-\alpha)$ -quantile de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, i.e, $P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pour $\alpha = 0.05$, on a $z_{1-\alpha} = 1.645$. Comme $t_{\text{obs}} > 1.645$, on rejette H_0 au niveau $\alpha = 0.05$, c'est à dire 5%. On déduit alors qu'il y a une augmentation de poids liée à la prise de ce médicament.

b) Soit $\Pi = P_{H_1}(\text{rejeter } H_0)$ dénote la puissance du test. On a alors :

$$\begin{aligned} \Pi &= P_{\mu=10} \left(\frac{\bar{X}-5}{8/\sqrt{n}} > 1.645 \right) = 1 - P_{\mu=10} \left(\bar{X} < 1.645 \times \frac{8}{\sqrt{n}} + 5 \right) \\ &= 1 - P \left(\frac{\bar{X}-10}{8/\sqrt{n}} < 1.645 - \frac{5\sqrt{n}}{8} \right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{\bar{X}-10}{8/\sqrt{n}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, il suffit alors d'avoir n suffisamment grand pour que $1.645 - \frac{5\sqrt{n}}{8} \leq z_{0.1}$, où $z_{0.1} = -1.28$. On obtient alors $n = 21.9$, donc à partir de $n = 22$, la puissance du test excède 0.9.

Solution 57. (a) Par la linéarité de l'espérance, on voit facilement que $E[\bar{X}] = \mu$. D'autre part, comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes (ce qui implique que $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ quand $i \neq j$), on peut écrire :

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \text{var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

On obtient alors :

$$E[\bar{X}^2] = \text{var}(\bar{X}) + \left(E[\bar{X}] \right)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

D'où, le biais de $\bar{X}^2$ est égal à $\sigma^2/n \neq 0$, ce qui montre que cet estimateur est biaisé.

(b) Par l'exercice 1 de la série 13, on sait que $E[S^2] = \sigma^2$. On obtient alors :

$$E[\bar{X}^2 - kS^2] = E[\bar{X}^2] - kE[S^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - k\sigma^2.$$

Par suite, en posant $k = \frac{1}{n}$, on obtient $E[\bar{X}^2 - kS^2] = \mu^2$. D'où $\bar{X}^2 - \frac{S^2}{n}$ est un estimateur non biaisé de μ^2 .

Solution 58. a) La log-vraisemblance est

$$l(\lambda) = 2n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i,$$

donc

$$l'(\lambda) = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i$$

donc $l'(\lambda) = 0$ donne

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{x}}.$$

D'où, on obtient à partir de $\bar{x}$, l'estimation de λ , $\hat{\lambda} = 1$ (milliers de maravédís)⁻¹.

b) On a

$$l''(\lambda) = -\frac{2n}{\lambda^2}$$

donc $J(\lambda) = -l''(\lambda) = \frac{2n}{\lambda^2}$ et $J(\lambda)^{-1/2} = \frac{\lambda}{\sqrt{2n}}$.

Un IC approximatif au niveau $\alpha = 95\%$ est donc

$$[\hat{\lambda} - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{2n}}, \hat{\lambda} + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{2n}}] = [0.930, 1.069] \quad (\text{milliers de maravédís})^{-1}.$$

c) Si on remplace λ par son estimation, la proportion de familles économisant moins de 1000 maravédís est donc

$$\int_0^1 \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1} \simeq 26\%.$$

Solution 59. a) La fonction de vraisemblance est définie sur $(\mathbb{R}^+)^n \times \Theta$, où $\Theta :=]0, \infty[$ est l'espace des paramètres.

$$L_{\mathbf{x}}(\theta) = \begin{cases} \theta^{-n} & \text{si } x_i \leq \theta \quad \forall i \leq n \\ 0 & \text{si } \exists i \leq n \text{ t.q. } x_i > \theta. \end{cases}$$

b) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ fixé. Si $\theta < \max_{i \leq n} x_i$, alors $L_{\mathbf{x}}(\theta) = 0$. Si $\theta \geq \max_{i \leq n} x_i$, alors $L_{\mathbf{x}}(\theta) = \theta^{-n}$. Il y a donc une discontinuité en $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\mathbf{x}) := \max_{i \leq n} x_i$, et on a $\bar{\theta}^{-n} > L_{\mathbf{x}}(\theta) = \theta^{-n}$, pour tous $\theta > \max_{i \leq n} x_i$.

Ainsi, le maximum de $L_{\mathbf{x}}(\theta)$ est atteint en $\bar{\theta}$ et l'estimateur maximum de vraisemblance est $\hat{\theta}(\mathbf{X}) := \max_{i \leq n} X_i$.

c) On a $b(\hat{\theta}) = E_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta = -\theta/(n+1)$. En effet, on a

$$P_{\theta}(\max_{i \leq n} X_i \leq x) = (P_{\theta}(X_k \leq x))^n = \frac{x^n}{\theta^n} \mathbf{1}_{]0, \theta[}(x) + \mathbf{1}_{[\theta, \infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

donc

$$E_{\theta}(\hat{\theta}) = \frac{1}{\theta^n} \int_0^{\theta} nx^n dx = \frac{n}{n+1} \theta.$$

Il s'ensuit que $T_1 := \frac{n+1}{n} \hat{\theta}$ est un estimateur non biaisé de θ .

d) On a $E_{\theta}(X_k) = \theta/2$. La statistique $\bar{X}$ a donc une moyenne $E_{\theta}(\bar{X}) = \theta/2$. Il suffit de poser $\tilde{\theta} := 2\bar{X}$, puisque $2E_{\theta}(\bar{X}) - \theta = 0$.

On note alors que

$$\text{var}_{\theta}(\tilde{\theta}) = 4\text{var}_{\theta}(\bar{X}) = \frac{4}{n} \text{var}_{\theta}(X_1) = \frac{\theta^2}{3n},$$

car

$$\text{var}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(x - \frac{\theta}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(x^2 + \frac{\theta^2}{4} - x\theta\right) dx = \frac{\theta^2}{12}.$$

Par conséquent $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}$ est meilleur que $2\bar{X}$, puisque

$$\begin{aligned} \text{var}_\theta\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}\right) &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \text{var}_\theta(\hat{\theta}) = \frac{(n+1)^2}{n^2} [E_\theta(\hat{\theta}^2) - E_\theta(\hat{\theta})^2] \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \left[\frac{1}{\theta^n} \int_0^\theta nx^{n+1} dx - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \right] \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} \right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \\ &< \text{var}_\theta(\tilde{\theta}) = \frac{\theta^2}{3n} \quad \forall n > 1. \end{aligned}$$

- e) On a $E_\theta(\tilde{\theta}) = \theta$ et $\text{Var}_\theta(\tilde{\theta}) = \theta^2/3n$. Pour n grand, le TLC implique que la loi de $Y := (\tilde{\theta} - E_\theta(T))/\sqrt{\text{Var}_\theta(T)}$ est proche de la loi $N(0, 1)$. Asymptotiquement, on choisit

$$A_\theta := \{ |(\tilde{\theta} - E_\theta(\tilde{\theta}))/\sqrt{\text{Var}_\theta(\tilde{\theta})}| \leq z_{1-\alpha/2} \}.$$

Pour $\alpha = 0.05$, A_θ est réalisé si et seulement si

$$\sqrt{3n} \left| \frac{\tilde{\theta} - \theta}{\theta} \right| \leq 1.96 \iff \left(1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\right)\theta \leq \tilde{\theta} \leq \left(1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\right)\theta.$$

On obtient pour l'intervalle (symétrique) de confiance

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= \left[\left(1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\right)^{-1} \tilde{\theta}(\mathbf{x}), \left(1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\right)^{-1} \tilde{\theta}(\mathbf{x}) \right] \\ &\approx \left[\tilde{\theta}(\mathbf{x}) - \frac{1.96}{\sqrt{3n}} \tilde{\theta}(\mathbf{x}), \tilde{\theta}(\mathbf{x}) + \frac{1.96}{\sqrt{3n}} \tilde{\theta}(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned}$$

- d) D'après e), l'intervalle de confiance (IC) bilatéral de niveau 95% pour le nombre de voitures θ dans l'état de Vaud est $\left[\tilde{\theta}(\mathbf{x}) - \frac{1.96}{\sqrt{3n}} \tilde{\theta}(\mathbf{x}), \tilde{\theta}(\mathbf{x}) + \frac{1.96}{\sqrt{3n}} \tilde{\theta}(\mathbf{x}) \right] \approx [460189, 823286]$.

Si on veut construire un intervalle de confiance (IC) de niveau 95% et de la forme $[0, U]$, pour $\alpha = 0.05$, en choisissant $U = \frac{\max_{i \leq n} x_i}{\alpha^{1/n}}$, on peut vérifier que

$$\Pr(0 \leq \theta \leq U) = \Pr(\theta \leq U) = 1 - \Pr(\max_{i \leq n} x_i \leq \alpha^{1/n} \theta) = 1 - \left(\frac{\alpha^{1/n} \theta}{\theta}\right) = 1 - \alpha.$$

Ainsi, $[0, U] \approx [0, 631061]$. On peut construire un autre IC avec le même niveau de confiance qui a une longueur plus courte que le second. $[L, U] \approx [523308, 631061]$ où $L = \max_{i \leq n} x_i$.